Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Testklausur zur Semestermitte
Version A

Kreuzen Sie jeweils die richtigen Aussagen an, und nur diese. In jeder Aufgabe ergibt die korrekte Bestimmung genau der richtigen Aussagen jeweils drei Punkte; wird genau ein Kreuz falsch gesetzt oder irrtümlich nicht gesetzt, so ergibt dies noch einen Punkt.

Aufgabe 1: Welche der folgenden Aussageformen sind logische Regeln (das heisst bei beliebiger Zuordnung von Wahrheitswerten zu A, B und C ergibt sich stets eine wahre Aussage) ?

(a) $(A \vee B) \wedge C \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(b) $A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee B)$

(c) $(A \vee \neg A) \vee B$

(d) $(A \wedge \neg A) \vee \neg B$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Aussagen gelten für *alle* Teilmengen A, B, C einer Menge X ?

(a) $(A \cup B) - A = B - A$

(b) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

(c) $A - (A - B) = A \cap B$

(d) $(A \subset B) \Longleftrightarrow (A \cup B = B)$

Aufgabe 3: Welche der folgenden Aussagen sind für *alle* Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen nichtleeren Mengen X und Y richtig ?

(a) f ist genau dann injektiv, falls ein $y \in Y$ existiert, für welches die Menge $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ einelementig ist.

(b) Ist f surjektiv, so auch injektiv.

(c) Existiert ein $y \in Y$ und ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, so ist f surjektiv.

(d) f ist genau dann injektiv, wenn für jede Teilmenge M von X gilt: $f^{-1}(f(M)) = M$. [Zur Erinnerung: $f^{-1}(f(M)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(M)\}$]

Aufgabe 4: Betrachten Sie die folgende Eigenschaft einer Abbildung $f : X \to Y$:

(R) für alle Mengen Z und alle Abbildungen $p : Y \to Z$ und $q : Y \to Z$ mit $p \circ f = q \circ f$ gilt notwendig $p = q$.

Welche der folgenden Implikationen gelten für *alle* f ?

(a) Ist f injektiv, so erfüllt f die Bedingung (R).

(b) Ist f surjektiv, so erfüllt f die Bedingung (R).

(c) Erfüllt f die Bedingung (R), so ist f injektiv.

(d) Erfüllt f die Bedingung (R), so ist f surjektiv.

Aufgabe 5: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, seien $v, w \in V$. Welche der folgenden Aussagen gelten immer ?

(a) $w \notin < v > \quad \Rightarrow \quad v \notin < w >$

(b) es existiert ein $u \in < v, w >$ mit $(< v > \cap < w >) = < u >$

(c) $w \notin < v > \quad \Rightarrow \quad < v, w > = < v > \cup < w >$

(d) $< v, w > \neq (< v > \cup < w >)$

Aufgabe 6: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) V ist nicht die leere Menge.

(b) Zu jedem Vektor $v_1 \in V$ existiert ein Vektor $v_2 \in V$ mit $v_1 + v_2 = 0$.

(c) Sind $v_1, v_2, v_3 \in V$ mit $v_1 + v_2 = v_2 + v_3$, so gilt $v_1 = v_3$.

(d) Für alle $\lambda \in K$ und $v_1, v_2 \in V$ gilt $\lambda(v_1 - v_2) = \lambda v_1 - \lambda v_2$.

Aufgabe 7: Betrachten Sie in $\mathbb{R}^2$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) Das System v_1, v_2, v_3 ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

(b) Das System v_1, v_2 ist linear abhängig.

(c) Das System v_1, v_2, v_3 enthält eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(d) Nach Weglassen eines beliebigen der drei Vektoren v_1, v_2, v_3 verbleibt eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 8: Sei K ein Körper und V ein dreidimensionaler K-Vektorraum. Welche der folgenden K-Vektorräume sind isomorph zu K^3 ?

(a) $V \oplus V \oplus V$

(b) V

(c) $\mathrm{Hom}_K(V, K)$

(d) $\mathrm{Ker}(\ell)$ für $\ell \in \mathrm{Hom}_K(K^4, K)$, $\ell \neq 0$.

Aufgabe 9: Sei K ein Körper, $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W mit $\dim(V) = 3$ und $\dim(W) = 5$. Es seien v_1, v_2, v_3 beziehungsweise w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 Basen von V und W, sei $A_f = (a_{ij})_{i,j}$ die (bezüglich dieser Basen) darstellende Matrix für f. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) $A_f \in \mathrm{Mat}_{3,5}(K)$

(b) Für alle $1 \leq j \leq 3$ gilt $f(v_j) = \sum_{i=1}^{5} a_{ij} w_i$.

(c) $\text{Rang}(A_f) \leq 3$

(d) $\text{Ker}(f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Rang}(A_f) = 3$

Aufgabe 10: Welche Aussagen über lineare Gleichungssysteme über den reellen Zahlen sind richtig ?

(a) Es gibt kein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem.

(b) Besitzt ein lineares Gleichungssystem keine Lösung, so ist es inhomogen.

(c) Ist ein lineares Gleichungssystem lösbar, aber nicht eindeutig lösbar, so besitzt es unendlich viele Lösungen.

(d) Die Summe zweier Lösungen eines linearen Gleichungssystems ist wieder eine Lösung.

Aufgabe 11: Seien U, W zwei K-Untervektorräume des endlich erzeugten K-Vektorraums V. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

(a) Gilt $U \cap W \neq U$ und $U \cap W \neq W$, so folgt $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W)$.

(b) Gilt $U =< v >$ für ein $v \in U$, so folgt $W + v = W + U$.

(c) Gilt $U \cap W = 0$, so gilt für jedes Komplement U' von U in V und für jedes Komplement W' von W in V, dass $U' + W' = V$.

(d) Aus $U^{\perp} \cap W^{\perp} = 0$ folgt $U + W = V$.

Aufgabe 12: Sei K ein Körper und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2,2}(K)$. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

(a) $A^2 = (a + d)A - (ad - bc)I_2$ [hier ist $(ad - bc)I_2 = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$]

(b) Ist $ad - bc = 0$, so ist die zu A gehörige lineare Abbildung $\ell_A : K^2 \to K^2$ nicht injektiv.

(c) A ist genau dann regulär, wenn genau drei der Zahlen a, b, c, d ungleich Null sind.

(d) Ist $K = \mathbb{R}$ und gilt $c = -b$ und $d = a$, so $\text{Rang}(A) \neq 1$.

Aufgabe 13: Sei K ein Körper und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten K-Vektorräumen, seien $v_1, \ldots, v_n$ Elemente von V. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

(a) Ist das System $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig, so auch das System $v_1, \ldots, v_n$.

(b) Ist $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, so ist $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von W.

(c) Lässt sich das System $v_1, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V ergänzen [das heisst: existieren $v'_1, \ldots, v'_t$ derart, dass $v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_t$ eine Basis von V ist], so lässt sich das System $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ zu einer Basis von W ergänzen [das heisst dann existieren $w_1, \ldots, w_m$ derart, dass $f(v_1), \ldots, f(v_n), w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W ist].

(d) Ist $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von W, so ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V.

Aufgabe 14: Sei K ein Körper, sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Welche der folgenden Aussagen über A sind äquivalent zur Regularität von A ?

(a) Für alle $b \in K^n$ existiert höchstens eine Lösung $x \in K^n$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(b) Die durch A beschriebene lineare Abbildung $K^n \to K^n, x \mapsto Ax$, ist surjektiv.

(c) Die Zeilen von A (aufgefasst als Elemente in K^n) bilden ein Erzeugendensystem für K^n.

(d) Es gibt ein $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ mit $AB = I_n = BA$.

Aufgabe 15: Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$. Diese Matrix ist regulär, sei $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ die inverse Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Koeffizienten b_{ij} von A^{-1} sind richtig ?

(a) $b_{1,3} = 0$

(b) $b_{2,3} = 0$

(c) $b_{3,1} = 3$

(d) $b_{1,1} = -3$