Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*
Testklausur zur Semestermitte
Version B

Kreuzen Sie jeweils die richtigen Aussagen an, und nur diese. In jeder Aufgabe ergibt die korrekte Bestimmung genau der richtigen Aussagen jeweils drei Punkte; wird genau ein Kreuz falsch gesetzt oder irrtümlich nicht gesetzt, so ergibt dies noch einen Punkt.

Aufgabe 1: Welche der folgenden Aussageformen sind logische Regeln (das heisst bei beliebiger Zuordnung von Wahrheitswerten zu A, B und C ergibt sich stets eine wahre Aussage) ?

(a) $B \vee \neg(A \wedge (A \Rightarrow B))$

(b) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(c) $(A \wedge \neg A) \vee B$

(d) $(A \vee \neg A) \vee \neg B$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Aussagen gelten für *alle* Teilmengen A, B, C einer Menge X ?

(a) $(A \cap B) \cup A = A - B$

(b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(c) $A - (A - B) = A$

(d) $(A - B = \emptyset) \Longleftrightarrow (A \cap B = A)$

Aufgabe 3: Welche der folgenden Aussagen sind für *alle* Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen nichtleeren Mengen X und Y richtig ?

(a) Existiert ein $y \in Y$, für welches $f^{-1}(y) = \{x \in X \,|\, f(x) = y\}$ leer oder einelementig ist, so ist f injektiv.

(b) Ist f injektiv, so auch surjektiv.

(c) f ist genau dann surjektiv, wenn für jede Teilmenge N von Y gilt: $f(f^{-1}(N)) = N$. [Zur Erinnerung: $f^{-1}(N) = \{x \in X \,|\, f(x) \in N\}$]

(d) f ist genau dann surjektiv, falls ein $y \in Y$ und ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert.

Aufgabe 4: Betrachten Sie die folgende Eigenschaft einer Abbildung $f : X \to Y$:

(L) für alle Mengen V und alle Abbildungen $g : V \to X$ und $h : V \to X$ mit $f \circ g = f \circ h$ gilt notwendig $g = h$.

Welche der folgenden Implikationen gelten für *alle* f ?

(a) Ist f injektiv, so erfüllt f die Bedingung (L).

(b) Ist f surjektiv, so erfüllt f die Bedingung (L).

(c) Erfüllt f die Bedingung (L), so ist f injektiv.

(d) Erfüllt f die Bedingung (L), so ist f surjektiv.

Aufgabe 5: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, seien $v, w \in V$. Welche der folgenden Aussagen gelten immer ?

(a) $v \in < w >$ oder $w \in < v >$

(b) $w \in < v > \iff v \in < w >$

(c) $(w \neq 0) \wedge (v \neq 0) \quad \Rightarrow \quad < v, w > \neq (< v > \cup < w >)$

(d) $< v, w > = < v > + < w >$

Aufgabe 6: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) Die leere Menge ist ein K-Untervektorraum von V.

(b) Zu jedem Vektor $v \in V$ existiert ein $\lambda \in K$ mit $\lambda v = v$.

(c) Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ und $v \in V$ mit $\lambda_1 v = \lambda_2 v$, so gilt $\lambda_1 = \lambda_2$.

(d) Für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt $\lambda(-v) = (-\lambda)v$.

Aufgabe 7: Betrachten Sie in $\mathbb{R}^2$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) Das System v_1, v_2 ist linear abhängig.

(b) Das System v_1, v_2, v_3 ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

(c) Nach Weglassen eines beliebigen der drei Vektoren v_1, v_2, v_3 verbleibt eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

(d) Das System v_1, v_2, v_3 enthält eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 8: Sei K ein Körper und V ein zweidimensionaler K-Vektorraum. Welche der folgenden K-Vektorräume sind isomorph zu K^4 ?

(a) $V \oplus V$

(b) $V \oplus V \oplus V \oplus V$

(c) $\mathrm{Hom}_K(V, V)$

(d) $\mathrm{Ker}(\ell)$ für $\ell \in \mathrm{Hom}_K(K^5, K)$, $\ell \neq 0$.

Aufgabe 9: Sei K ein Körper, $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W mit $\dim(V) = 5$ und $\dim(W) = 3$. Es seien v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 beziehungsweise w_1, w_2, w_3 Basen von V und W, sei $A_f = (a_{ij})_{i,j}$ die (bezüglich dieser Basen) darstellende Matrix für f. Welche der folgenden Aussagen sind richtig ?

(a) Für alle $1 \leq j \leq 5$ gilt $f(v_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} w_i$.

(b) Die Matrix A_f hat 5 Zeilen und 3 Spalten.

(c) $\mathrm{Im}(f) = W \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Rang}(A_f) = 3$

(d) $\mathrm{Rang}(A_f) \leq 3$

Aufgabe 10: Welche Aussagen über lineare Gleichungssysteme über den reellen Zahlen sind richtig ?

(a) Es gibt lineare Gleichungssysteme ohne Lösungen.

(b) Jedes homogene lineare Gleichungssystem besitzt eine Lösung.

(c) Jedes lineare Gleichungssystem, das mindestens zwei verschiedenen Lösungen besitzt, besitzt unendlich viele Lösungen.

(d) Besitzt ein lineares Gleichungssystem genau eine Lösung, so ist es inhomogen.

Aufgabe 11: Seien U, W zwei K-Untervektorräume des endlich erzeugten K-Vektorraums V. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

(a) Gilt $U + W = U$, so folgt $\dim(U) - \dim(U \cap W) = \dim(U + W)$.

(b) Für alle $v \in V - W$, gilt $U \cap (W + v) = \emptyset$.

(c) Seien U' ein Komplement von U in V und W' ein Komplement von W in V. Gilt $U' + W' = V$, so folgt $U \cap W = 0$.

(d) Aus $U^\perp + W^\perp = V^*$ folgt $U \cap W = 0$.

Aufgabe 12: Sei K ein Körper und $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(K)$. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

(a) Ist A regulär, so ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$.

(b) $A^2 = (a+d)A - (ad-bc)I_2$ [hier ist $(ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$]

(b) Ist $ad - bc = 0$, so ist die zu A gehörige lineare Abbildung $\ell_A : K^2 \to K^2$ nicht surjektiv.

(d) Ist $K = \mathbb{C}$ und gilt $c = -b$ und $d = a$, so $\mathrm{Rang}(A) \neq 1$.

Aufgabe 13: Sei K ein Körper und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten K-Vektorräumen, seien $v_1, \ldots, v_n$ Elemente von V. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig ?

(a) Ist $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, so lässt sich $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ zu einer Basis von W ergänzen [das heisst dann existieren $w_1, \ldots, w_m$ derart, dass $f(v_1), \ldots, f(v_n), w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W ist].

(b) Ist das System $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, so lässt sich $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ zu einer Basis von W ergänzen.

(c) Ist das System $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig, so lässt sich $v_1, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V ergänzen [das heisst dann existieren $v'_1, \ldots, v'_t$ derart, dass $v_1, \ldots, v_n, v'_1, \ldots, v'_t$ eine Basis von V ist].

(d) Ist $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von W, so lässt sich $v_1, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V ergänzen.

Aufgabe 14: Sei K ein Körper, sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Welche der folgenden Aussagen über A sind äquivalent zur Regularität von A ?

(a) Es gibt ein $B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ mit $AB = I_n = BA$.

(b) Für alle $b \in K^n$ existiert mindestens eine Lösung $x \in K^n$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

(c) Die durch A beschriebene lineare Abbildung $K^n \to K^n, x \mapsto Ax$, ist injektiv.

(d) Die Spalten von A bilden ein Erzeugendensystem für K^n.

Aufgabe 15: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$. Diese Matrix ist regulär, sei $A^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ die inverse Matrix. Welche der folgenden Aussagen über die Koeffizienten b_{ij} von A^{-1} sind richtig ?

(a) $b_{1,3} = 0$

(b) $b_{2,3} = 0$

(c) $b_{3,1} = 4$

(d) $b_{1,1} = 1$