Musterlösung zur Serie 6

20. Mai 2010

Ich schreibe hier nur auf, was die Studenten zum Großteil an der Tafel vorgerechnet haben.

Aufgabe 1: (Herr Huber)
Bei einer diagonalisierbaren Matrix A aus $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ ist $\mathbb{R}^n$ die direkte Summe der Eigenräume von A. Ist A zusätzlich symmetrisch, so ist diese direkte Summe sogar orthogonal, d.h. dass die Summanden paarweise zueinander orthogonal sind. Die Idee für die Aufgabe ist die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung auf die Eigenräume anzuwenden. Ich schreibe im Folgenden nur die Ergebnisse hin.

1. Für
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
erhalt man $\chi_A(X) = X(3-X)^2$
$$\mathrm{Eig}(A,0) =< (1,1,-1)^T >, \ \mathrm{Eig}(A,3) =< (1,-1,0)^T, (1,0,1)^T > .$$
Wir wenden nun die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung auf die angegebenen Basen der Eigenräume an und erhalten:
$$\mathrm{Eig}(A,0) =< \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T >, \ \mathrm{Eig}(A,3) =< \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T > .$$
Eine kurze Probe zeigt, dass
$$B := (\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T)$$

eine ON-Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. (Ganz allgemein: Rechnen Sie ruhig dem Korrektor schwierige Proben auf dem Lösungsblatt vor.) Wir setzen

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Dann ist S orthogonal, da B eine ON-Basis ist, und

$$S^{-1}AS = M^B_{(e_i^{(3)})}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})M^{(e_i^{(3)})}_{(e_i^{(3)})}(l_A)M^{(e_i^{(3)})}_B(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{diag}(0,3,3).$$

2. Für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

errechnet man

- $\chi_A(X) = (4+X)^2(2-X)$,
- $\mathrm{Eig}(A,2) =< (1,0,-1)^T >=< \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T >$
- $\mathrm{Eig}(A,-4) =< (1,0,1)^T, (0,1,0)^T >=< \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T, (0,1,0)^T >$

wiederum unter Zuhilfenahme der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung auf den einzelnen Eigenräumen. Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt das Gewünschte.

Aufgabe 2:(?)

(i) Das Nachprüfen der Eigenschaften hat folgende Grundidee. Wenn h, k zwei Endomorphismen von V sind, so dass

$$\langle h(v), w \rangle = \langle k(v), w \rangle \tag{1}$$

und insbesondere

$$0 = \langle h(v) - k(v), h(v) - k(v) \rangle$$

für alle Vektoren v und w aus V gilt, dann sind h und k gleich, da $\langle , \rangle$ definit ist. Nun muss man nur noch die Gleichungen 1 für

- $h = \widetilde{f \circ g},\ k = \tilde{g}\tilde{f}$ und
- $h = \widetilde{\lambda f + \mu g},\ k = \bar{\lambda}\tilde{f} + \bar{\mu}\tilde{g}$

nachweisen.
(ii) $f \circ \tilde{f} = \tilde{\tilde{f}} \circ \tilde{f} = f \circ \tilde{f}$. Für einen Eigenvektor v von $h := f \circ \tilde{f}$ zu $\lambda \in \mathbb{C}$ erhält man die Gleichungen

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle h(v), v\rangle = \langle v, h(v)\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle$$

und

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle h(v), v\rangle = \langle \tilde{f}(v), \tilde{f}(v)\rangle.$$

Für λ ergibt sich aus der ersten Gleichung, dass es reell, und aus der zweiten, dass es nicht negativ ist, da $\langle v, v\rangle$ positiv und $\langle \tilde{f}(v), \tilde{f}(v)\rangle$ nicht negativ ist.
(iii) Dies ist nun eine leichte Anwendung von (i).

Aufgabe 3:(Herr Kötschan)
Wir nehmen an, dass f nicht der Nullendomorphismus ist. Eine gegebene ON-Basis (b_i) erfüllt

$$\langle b_i, b_j\rangle = \langle b_i + b_j, b_i - b_j\rangle$$

für ungleiche i und j, und die Voraussetzungen an f implizieren nun

1. $\langle f(b_i), f(b_j)\rangle = 0$ und
2. $$\begin{aligned} ||f(b_i)||^2 - ||f(b_j)||^2 &= ||f(b_i)||^2 - \langle f(b_i), f(b_j)\rangle + \langle f(b_j), f(b_i)\rangle - ||f(b_j)||^2 \\ &= \langle f(b_i + b_j), f(b_i - b_j)\rangle = 0 \end{aligned}$$

für $i \neq j$. Man beachte, dass $f(b_1)$ nicht null ist, da sonst nach der letzten Gelichung f der ausgeschlossene Nullendomorphismus sein müsste. Wir setzen $\alpha := \frac{1}{||f(b_1)||}$, und dann folgt aus obigem:

$$\langle b_i, b_j\rangle = \alpha^2\langle f(b_i), f(b_j)\rangle = \langle \alpha f(b_i), \alpha f(b_j)\rangle$$

für alle i und j, und αf ist eine Isometrie.

Aufgabe 4:
(a) Nach einer Dimensionsformel ist das orthogonale Komplement von H eindimensional, etwa erzeugt durch einen normierten Vektor b. Da b orthogonal zu H und f orthogonal ist, ist auch $f(b)$ orthogonal zu $f(H) = H$, also ein skalares Vielfaches von b, d.h. b ist ein Eigenvektor von f. Nach

einer vorangegangenden Übungsserie kann das zu sich selbst inverse f nur die Eigenwerte 1 und -1 annehmen, und aus $f \neq \mathrm{id}$ folgt $b \in \mathrm{Eig}(f, -1)$. Wir haben

- $f|_H = (s_b)_H$ und
- $f(b) = -b = s_b(b)$.

Die Gleichheit von f und s_b wird erzwungen, da $H \cup \{b\}$ eine Basis von V enthält.
(b) (Herr Foerster) Hier hat Herr Förster ein verblüffend schönes Skalarprodukt angegeben. Man wählt irgendein Skalarprodukt $\langle , \rangle$ auf V, zum Beispiel indem man über eine gewählte Isomorphie $V \cong \mathbb{R}^{\dim V}$ das Standartskalarprodukt von $\mathbb{R}^n$ auf V zurückzieht, und man definiert

$$\langle v, w \rangle_V := \langle v, w \rangle + \langle f(v), f(w) \rangle.$$

Die Bilinearform $\langle , \rangle_V$ erfüllt das Gewünschte.