Musterlösung zur Serie 5

20. Mai 2010

Aufgabe 1:
Fixiere $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$.

1. Die Abbildung

$$C \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Spur}(CB^T) \in \mathbb{R}$$

   ist linear, da die Spur und die Rechtmultiplikation mit B^T linear sind.

2. Die Symmetrie folgt aus

$$\mathrm{Spur}(AB^T) = \mathrm{Spur}((AB^T)^T) = \mathrm{Spur}((B^T)^T A^T) = \mathrm{Spur}(BA^T).$$

3. Für $A \neq 0$, haben wir

$$\mathrm{Spur}(AA^T) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0.$$

Also ist $(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB^T)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2:
Hier gebe ich nur die Lösungen an. Für Aufgabenteil (i) ergibt sich

$$\lambda_1 := \frac{1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda_2 := \frac{1}{||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und

$$v_3 = \frac{\epsilon}{\sqrt{6}}(1, -1, -2)^T, \ \epsilon \in \{+1, -1\}.$$

Die Idee ist eine Basisergänzung gefolgt von einer Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, oder einfach mittels eines LGS einen Vektor orthogonal zu v_1 und v_2 zu finden und alle Vektoren zu normieren.
Die Koeffizienten von w bekommt man dann durch Anwendung des Skalarproduktes.

$$\mu_1 = \langle w, \lambda_1 v_1 \rangle = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}}$$

$$\mu_2 = \langle w, \lambda_2 v_2 \rangle = \frac{c_1 - c_2 + c_3}{\sqrt{3}}$$

$$\mu_2 = \langle w, v_3 \rangle = \epsilon \frac{c_1 - c_2 - 2c_3}{\sqrt{6}}$$

Für (ii)

$$w = e^{i\phi} \frac{1}{\sqrt{10}} (2i, -1 - i, 2)^T, \ \phi \in [0, 2\pi[.$$

Hier konnte man entweder genau hinschauen, oder einfach ein LGS loesen. Man beachte, dass es hier unendlich viele Loesungen gibt.

Aufgabe 3:
In (i) und (ii) musste man nur nachrechnen. Zu (iii): Aufgrund von

$$s_a(a) = a - 2\frac{\langle a, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a = -a$$

ist a ein Eigenvektor von s_a zu -1, und ein Vektor v der

$$-v = s_a(v) = v - 2\frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a$$

und damit äquivalent

$$v = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a$$

erfüllt, liegt im Spann von a. Also ist $V_{-1} =< a >$.
Betrachte $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 2$. Nach der Definition von s_a gilt für $v \in V$

$$v = s_a(v) \Longleftrightarrow -2\frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a = 0 \Longleftrightarrow -2\frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} = 0 \Longleftrightarrow \langle v, a \rangle = 0.$$

Bei der zweiten Äquivalenz wurde verwendet, dass a nicht der Nullvektor ist, und bei der dritten, dass 2 und $\langle a, a \rangle$ ungleich $0_{\mathbb{R}}$ sind. Mit obiger Äquivalenz erhalten wir $V_1 =< a >^{\perp}$ und somit nach der Vorlesung

$$V_1 \oplus V_{-1} =< a >^{\perp} \oplus < a >= V.$$

Desweiteren ist 1 ein Eigenwert von s_a, da die Dimension von $< a >^\perp$ gleich

$$\dim V - 1 \geq 2 - 1$$

ist.

Aufgabe 4:
Man definiere $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ bezüglich der orthogonalen Summe

$$U \oplus U^\perp = V$$

via

$$f(u + w) = u, u \in U,\ w \in U^\perp.$$

Man nennt f die orthogonale Projektion von V auf U. Dann gilt für $v = u+w$ mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$

$$||f(v)||^2 = ||u||^2 \leq ||u||^2 + ||w||^2 = \langle u, u\rangle + \langle w, w\rangle + 2\langle w, u\rangle = \langle v, v\rangle = ||v||^2.$$

Die zweite Gleichheit gilt, da u und w zueinander orthogonal sind. Nach Ziehen der Wurzel erhält man (i), und (ii) wird durch die folgende Kette von Äquivalenzen gezeigt.

$$||f(v)|| = ||v|| \Longleftrightarrow ||f(v)||^2 = ||v||^2 \Longleftrightarrow ||u||^2 = ||u||^2 + ||w||^2 \Longleftrightarrow ||w||^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow ||w|| = 0 \Longleftrightarrow w = 0 \Longleftrightarrow v = u \in U.$$

Die vorletzte Äquivalenz folgt aus der Definitheit des Skalarproduktes.