Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Klausur
02. Juli 2010

Aufgabe 1: (5 Punkte) Bekanntlich ist die formale Ableitung ein Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}[X]$:

$$\mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], \quad \varphi(X) = \sum_{i\geq 0} a_i X^i \mapsto \varphi'(X) = \sum_{i\geq 0} (i+1)a_{i+1}X^i.$$

Sei $\mathcal{P}_2$ der $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$ gebildet durch die Polynome vom Grad höchstens 2. Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definiert durch

$$(f(\varphi))(X) = (1+X)\varphi'(X) - 3\varphi(X) \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{P}_2.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume von f. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von f. Ist f diagonalisierbar ?

Lösung: In der Basis $1, X, X^2$ von $\mathcal{P}_2$ ist $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ die darstellende Matrix. Es ist $(1,2,1)^t$ Eigenvektor zum Eigenwert -1, ferner $(1,1,0)$ zu -2 und $(1,0,0)$ zu -3. Insbesondere ist f diagonalisierbar, und $\mu_f = -(X+1)(X+2)(X+3)$.

Aufgabe 2: (5 Punkte) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_{ℓ_A} und das Minimalpolynom μ_{ℓ_A} der durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 8 & -6 \\ -4 & 5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{C})$$

dargestellten linearen Abbildung $\ell_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie ferner ihre Jordansche Normalform. Gibt es eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{C})$, die nicht ähnlich zu A ist, aber mit $\mu_{\ell_A} = \mu_{\ell_B}$?

Lösung: Man findet $\chi_{\ell_A}(X) = \mu_{\ell_A}(X) = (2-X)^3$. Mit $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Ein B wie gefragt existiert nicht.

Aufgabe 3: (4 Punkte) (a) Inwieweit ist die n-te Spalte einer unitären $n \times n$-Matrix durch die ersten $n-1$ Spalten bereits gegeben ?

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$. Zu $1 \leq i \leq n$ entstehe $A^{(i)} \in \mathrm{Mat}_{i,i}(\mathbb{R})$ aus A durch Streichen der letzten $n-i$ Zeilen und der letzten $n-i$ Spalten. Zeigen Sie: sind alle $A^{(i)}$ orthogonal, so ist A eine Diagonalmatrix mit Einträgen in $\{-1, +1\}$.

Lösung: (a) Die Spalten einer unitären $n \times n$-Matrix bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$. Die n-te Spalte hat also die Länge 1 und liegt im orthogonalen Komplement des durch die ersten $n-1$ Spalten erzeugten $\mathbb{C}$-Untervektorraums; dieses Komplement ist eindimensional. Also ist die n-Spalte bis auf Multiplikation mit einem Element aus $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ eindeutig bestimmt.

(b) Induktion nach n. Induktionsschritt $n-1 \to n$: nach Voraussetzung haben die Spalten der Matrix $A^{(n-1)}$ die Länge 1; da dies auch für $A = A^{(n)} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ gelten soll, folgt $a_{n,i} = 0$ für alle $1 \le i \le n-1$. Ebenso folgt $a_{i,n} = 0$ für alle $1 \le i \le n-1$. Da alle Eigenwerte von A in $\{\pm 1\}$ liegen, folgt $a_{nn} \in \{\pm 1\}$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung.

Aufgabe 4: (5 Punkte) Sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine endliche Untergruppe (also eine endliche Teilmenge G von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $A_1 \cdot A_2 \in G$ für alle $A_1, A_2 \in G$, mit $1 \in G$ und mit $A^{-1} \in G$ für alle $A \in G$). Sei $\langle .,. \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ setze

$$\langle x, y \rangle_G := \sum_{A \in G} \langle Ax, Ay \rangle.$$

Zeigen Sie:

(a) $\langle .,. \rangle_G$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(b) $\langle Ax, Ay \rangle_G = \langle x, y \rangle_G$ für alle $A \in G$, alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(c) Es existiert ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS \in \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B^t = B^{-1}\}$ für alle $A \in G$.

[Bemerkung: Aussage (c) besagt, vornehm ausgedrückt: jede endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist konjugiert zu einer Untergruppe der orthogonalen Gruppe $\mathcal{O}(n) = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B^t = B^{-1}\}$.]

Lösung: (a) und (b): nachrechnen. Zu (c): nach (a) und einem Ergebnis aus der Vorlesung existiert ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $\langle Sx, Sy \rangle_G = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Andererseits gilt

$$\{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B^t = B^{-1}\} = \{B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \langle Bx, By \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Zusammen ergibt sich so die Behauptung aus (b).

Aufgabe 5: (3 Punkte) Sei K ein Körper, f ein K-linearer Endomorphismus des endlich erzeugten K-Vektorraums V und $v_0 \in V$. Sei $\Phi : V \to V$ die affine Abbildung definiert durch $\Phi(v) = f(v) + v_0$. Zeigen Sie: ist $0 \in V$ der einzige Fixpunkt von f, so hat Φ genau einen Fixpunkt.

[Ganz allgemein: Ist M eine Menge, $g : M \to M$ eine Abbildung, so heißt jedes Element $m \in M$ mit $g(m) = m$ ein Fixpunkt von g.]

Lösung: Ist $0 \in V$ der einzige Fixpunkt von f, so ist der K-lineare Endomorphismus $f - \mathrm{id}$ von V injektiv, also bijektiv, also existiert genau ein $v \in V$ mit $(f - \mathrm{id})(v) = -v_0$.

Aufgabe 6: (4 Punkte) Sei V ein euklidischer endlich erzeugter Vektorraum, $U \subset V$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum. Die Funktion $\varphi : V \to \mathbb{R}$ sei durch

$$\varphi(x) = \min\{||x - u||^2 \,;\, u \in U\}$$

definiert. Zeigen Sie: φ ist eine quadratische Form auf V. Was lässt sich über ihren Rang und ihren Index sagen ?

[Vielleicht hilft es Ihnen, sich eine Skizze im Fall $\dim(V) = 2$ und $\dim(U) = 1$ zu machen.]

Lösung: Seien $q : V \to U$ und $p : V \to U^\perp$ die Projektionen auf die beiden direkten Summanden der Zerlegung $V = U \oplus U^\perp$. Für alle $x \in V$ und alle $u \in U$ gilt dann $||x - u|| = ||p(x) + q(x) - u|| \leq ||p(x)|| + ||q(x) - u||$, also $\varphi(x) = ||p(x)||^2$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V, derart, dass $v_1, \ldots, v_r$ eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ und $v_{r+1}, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von U ist (für geeignete $0 \leq r \leq n$). Nach dem soeben überlegten gilt $\varphi(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^2$ für alle $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$. Also ist φ eine quadratische Form, ihr Rang und ihr Index sind gleich $\dim(V) - \dim(U) = \dim(U^\perp)$.

Aufgabe 7: (4 Punkte) Wir identifizieren (wie in der Vorlesung) die komplexe eindimensionale projektive Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Damit werden (wie in der Vorlesung beschrieben) die Kollineationen von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ zu gewissen bijektiven Abbildungen $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Zu $b \in \mathbb{C}$ heißt die Abbildung $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z \mapsto z + b$ die Translation um $b \in \mathbb{C}$. Zu $a \in \mathbb{C}^\times$ heißt die Abbildung $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z \mapsto az$ die Drehstreckung (um $a \in \mathbb{C}^\times$). Die Abbildung $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ heißt die Kreisspiegelung (am Einheitskreis). [Dabei gelten stets (wie in der Vorlesung) die üblichen Konventionen betreffend den Punkt ∞ und die Division durch 0, also $\infty + b = \infty$ und $a\infty = \infty$ für $b \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}^\times$, ferner $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$.] Zeigen Sie:

(a) Jede Translation, jede Drehstreckungen und jede Kreisspiegelung ist eine Kollineation.

(b) Jede Kollineation $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ läßt sich schreiben als die Verknüpfung geeigneter Translationen, Drehstreckungen und Kreisspiegelungen (diese 'elementaren' Kollineation dürfen dabei nötigenfalls auch mehrfach angewandt werden).

Lösung: (a) Die Kollineationen von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sind genau die bijektiven Abbildungen

$$f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \qquad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$. Dabei ist f eine Translation (um $b \in \mathbb{C}$), falls $c = 0$ und $a = d = 1$, eine Drehstreckung (um $a \in \mathbb{C}^\times$), falls $c = b = 0$ und $d = 1$, und die Kreisspiegelung (am Einheitskreis), falls $b = c = 1$ und $a = d = 0$.

(b) Erste Lösung: Man zeige, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ durch die entsprechenden Matrizen erzeugt wird. Dazu: jedes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ist nach Skalierung mit einem $\lambda \in \mathbb{C}^\times$

entweder von der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ oder von der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt aber

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-ad & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zweite Lösung: Nach dem Hauptsatz der projektiven Geometrie (für $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$), und da die Umkehrabbildungen von Translationen, Drehstreckungen und Kreisspiegelungen ebenfalls wieder Translationen, Drehstreckungen und Kreisspiegelungen sind, genügt es, folgendes zu zeigen: sind p_1, p_2, p_3 drei paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, so existiert eine Verknüpfung geeigneter Translationen, Drehstreckungen und Kreisspiegelungen, die p_1, p_2, p_3 auf $0, 1, \infty$ abbildet. Erster Schritt: nach eventueller Anwendung einer Translation und einer Drehstreckung darf $p_3 = \infty$ angenommen werden. Zweiter Schritt: nach einer Translation darf $p_1 = 0$ angenommen werden. Dritter Schritt: nach einer Drehstreckung darf $p_2 = 1$ angenommen werden.

Aufgabe 8: (5 Zusatzpunkte) Zu $z \in \mathbb{R}^2$ und $\theta \in [0, 2\pi[$ sei Φ_z^θ die Drehung in z um den Winkel θ; also, in Formeln ausgedrückt, die Abbildung

$$\Phi_z^\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto z + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} (v - z).$$

Seien nun $v, w, x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq w$ und $x \neq y$, mit $||v - w|| = ||x - y||$ und derart, dass kein $\lambda > 0$ mit $\lambda(y - x) = w - v$ existiert (Machen Sie sich klar, was diese Voraussetzungen geometrisch besagen !). Zeigen Sie (zum Beispiel mit Hilfe des Ergebnisses aus Aufgabe 5): es existiert ein $z \in \mathbb{R}^2$ und ein $\theta \in]0, 2\pi[$ mit $\Phi_z^\theta(v) = x$ und $\Phi_z^\theta(w) = y$ (Sie brauchen z und θ aber nicht auszurechnen !).

Lösung: Wegen $||v - w|| = ||x - y||$ existiert ein $\theta \in [0, 2\pi[$ mit $\Phi_x^\theta(w + x - v) = y$. Aus $\lambda(y - x) \neq w - v$ für alle $\lambda > 0$ folgt dann weiter $\theta \neq 0$. Insbesondere hat der $\mathbb{R}$-lineare Endomorphismus Φ_0^θ von $\mathbb{R}^2$ keinen Fixpunkt. Nach dem Ergebnis aus Aufgabe 5 hat daher die Zuordnung $u \mapsto \Phi_0^\theta(u) + v - x$ einen Fixpunkt, das heisst es existiert ein $u \in \mathbb{R}^2$ mit $\Phi_0^\theta(u) = u + x - v$. Setzen wir $z = v - u$, so folgt $\Phi_z^\theta(v) = v - u + \Phi_0^\theta(v - v + u) = x$ und $\Phi_z^\theta(w) = v - u + \Phi_0^\theta(w - v + u) = v - u + \Phi_0^\theta(u) + \Phi_0^\theta(w - v) = x + \Phi_0^\theta(w - v) = \Phi_x^\theta(w + x - v) = y$.