Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 1

AUFGABE 1: Sei K ein Körper, sei $f : K^2 \to K^2$ definiert durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ x+y \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix A (bezüglich der Standardbasis des K^2). Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von f. Geben Sie eine Basis des K-Vektorraums K^2 bestehend aus Eigenvektoren (für f) an. Bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(K)$, für die $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat (das heisst: alle Einträge, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, seien Null.)

AUFGABE 2: Sei K ein Körper, seien f und g Endomorphismen des endlich dimensionalen K-Vektorraums V. Es gelte $f \circ f = f$ und $g \circ g = \mathrm{id}_V$.

(a) Was lässt sich über die Eigenwerte von f und g sagen ?

(b) Zeigen Sie: V besitzt eine Basis bestehend aus Eigenvektoren für f.

(c) Zeigen Sie: gilt $1 + 1 \neq 0$ in K, so besitzt V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren für g. Ist die Voraussetzung $1 + 1 \neq 0$ notwendig ?

AUFGABE 3: (Vergleiche mit LAI*, Blatt 10, Aufgabe 1). Sei K ein Körper.

(a) Seien $B_1 \in \mathrm{Mat}_{r,r}(K)$, $B_2 \in \mathrm{Mat}_{m,m}(K)$ und $B_3 \in \mathrm{Mat}_{r,m}(K)$, dazu sei $A = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{r+m,r+m}(K)$. Zeigen Sie $\det(A) = \det(B_1)\det(B_2)$.

(b) Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismen des endlich dimensionalen K-Vektorraums V. Sei $U \subset V$ ein f-invarianter K-Untervektorraum (also ein K-Untervektorraum, für den $f(U) \subset U$ gilt). Sei

$$\overline{f} : V/U \to V/U, \qquad v + U \mapsto f(v) + U$$

der induzierte Endomorphismus des Faktorraums V/U und sei $f|_U : U \to U$ der durch Einschränkung von f nach U erhaltene Endomorphismus von U. Zeigen Sie $\det(f) = \det(\overline{f})\det(f|_U)$.

AUFGABE 4: Sei K ein Körper und $f : V \to V$ ein Endomorphismus des endlich dimensionalen K-Vektorraums $V \neq 0$, dazu $\chi_f(X) \in K[X]$ das charakteristische Polynom. f heisst *nilpotent*, falls es eine natürliche Zahl m gibt mit $f^m = 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist f nilpotent, so ist $0 \in K$ ein Eigenwert von f, und f besitzt keine weiteren Eigenwerte in K. Wenn umgekehrt f die Eigenschaft hat, dass $\chi_f(0) = 0$ und $\chi_f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in K - \{0\}$, ist dann f notwendig nilpotent ?

(b) f ist genau dann nilpotent, wenn $\chi_f(X) = (-X)^{\dim(V)}$.