Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 10

Aufgabe 1: Betrachten Sie die beiden folgenden Quadriken Q_1 und Q_2:

$$Q_1 = \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + x_2 = 1\},$$

$$Q_2 = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + x_2 - x_3 = 0\}.$$

Bestimmen Sie eine bijektive affine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (beziehungsweise $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$) derart, dass $\phi(Q_1)$ beziehungsweise $\phi(Q_2)$ eine der in Satz 25.1 beschriebenen Quadriken ist. Bestimmen Sie ferner den Rang und den Index der (in den derart gemäß Satz 25.1 gefundenen Gleichungen) auftretenden quadratischen Formen.

Aufgabe 2: Betrachten Sie die Quadrik

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \,|\, 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_2x_3 - 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2\}.$$

sowie das einschalige Hyperboloid

$$Q' = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

Geben Sie eine bijektive affine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(Q') = Q$ an.

Aufgabe 3: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $H \subset V$ der Form

$$H = \{x \in V \,|\, \ell(x) = c\}$$

mit einer Linearform $\ell \in V^* - \{0\}$ und einem $c \in K$ heißt *affine Hyperebene* in V. Ist $\dim(V) = 2$ so heißt eine affine Hyperebene in V auch eine Gerade in V. Zeigen Sie, dass die projektiven Abschlüsse zweier verschiedener affiner Geraden in K^2 genau einen gemeinsamen Punkt in $\mathbb{P}^2(K)$ besitzen.

Aufgabe 4: (Kegelschnitte) Betrachten Sie in $\mathbb{R}^3$ den Kreiskegel

$$K = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine affine Hyperebene H in $\mathbb{R}^3$, für die $H \cap K$ ein Kreis in H ist. [Eine affine Hyperebene H in $\mathbb{R}^3$ ist ein affiner Unterraum in $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2, das heisst es existiert ein $h \in \mathbb{R}^3$ und ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Untervektorraum U in $\mathbb{R}^3$ mit $H = h + U$. Sie sollen nun H und h und einen $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus $j : U \cong \mathbb{R}^2$ so wählen, dass $H \cap K = h + j^{-1}(D)$ mit $D = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y_1^2 + y_2^2 = 1\}$.]

(b) Bestimmen Sie eine affine Hyperebene H in $\mathbb{R}^3$, für die $H \cap K$ eine Hyperbel ist.

(c) Bestimmen Sie eine affine Hyperebene H in $\mathbb{R}^3$, für die $H \cap K$ eine Parabel ist.

Aufgabe 5: Betrachten Sie in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die projektive Quadrik

$$Q = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \,|\, x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Q ist projektiv äquivalent zu einer projektiven Quadrik Q' in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, die der projektive Abschluss eines Kreises in $\mathbb{R}^2$ ist. (Wie üblich denken wir uns $\mathbb{R}^2$ als in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vermöge der Standardinklusion $(x_1, x_2) \mapsto [1 : x_1 : x_2]$ enthalten.)

(b) Q ist projektiv äquivalent zu einer projektiven Quadrik Q' in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, die der projektive Abschluss einer Hyperbel in $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Q ist projektiv äquivalent zu einer projektiven Quadrik Q' in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, die der projektive Abschluss einer Parabel in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 6: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Zu $0 \le i \le n$ betrachten wir die Abbildung

$$\nu_i : K^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(K), \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto [x_1 : \ldots : x_{i-1} : 1 : x_i : \ldots : x_n].$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $W_i = \nu_i(K^n)$ von ν_i. Zeigen Sie, dass ν_i injektiv ist, also $\nu_i : K^n \to W_i$ bijektiv, und geben Sie die Umkehrabbildung $W_i \to K^n$ an. Zeigen Sie $\mathbb{P}^n(K) = \cup_{i=0}^n W_i$.

(b) Sei nun $K = \mathbb{R}$. Wir nennen eine Teilmenge U von $\mathbb{P}^n(K)$ offen, falls $\nu_i^{-1}(U \cap W_i)$ offen ist in $\mathbb{R}^n$, für jedes $0 \le i \le n$. Zeigen Sie, dass damit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ein topologischer Raum ist. Zeigen Sie ferner, dass alle W_i offen in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sind, und dass, wird W_i mit der Teilraumtopologie versehen, die Abbildung $\nu_i : \mathbb{R}^n \to W_i$ ein Homöomorphismus ist. Zeigen Sie schliesslich, dass $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ kompakt ist.