Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 2

Aufgabe 1: Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der durch die folgenden Matrizen dargestellten linearen Abbildungen:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q})$,

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q})$, für feste $a, b \in \mathbb{Q}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & c-1 & 0 \\ 0 & 1 & c^2-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{Q})$, für festes $c \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie auf weniger als dreihundert Seiten die dreitausendste Potenz der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 & 6 \\ -12 & 2 & 12 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4,4}(\mathbb{Q}).$$

Aufgabe 3: Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\Phi_A : \mathrm{Mat}_{n,n}(K) \to \mathrm{Mat}_{n,n}(K), \qquad B \mapsto AB$$

ist K-linear. Zeigen Sie $\chi_{\Phi_A}(X) = \chi_{\ell_A}(X)^n$.

Hinweis: Zu $1 \leq i, j \leq n$ sei $e^{(ij)} = (e^{(ij)}_{s,t})_{1 \leq s,t \leq n} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ definiert durch $e^{(ij)}_{i,j} = 1$ und $e^{(ij)}_{s,t} = 0$ falls $i \neq s$ oder $j \neq t$. Dann ist $\{e^{(ij)} \,|\, 1 \leq i, j \leq n\}$ eine Basis von $\mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von Φ_A bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper. Zeigen Sie: Zu jedem normierten Polynom $P \in K[X]$ existiert eine K-lineare Abbildung $f : K^n \to K^n$ mit $n = \deg(P)$, deren charakteristisches Polynom gerade P ist.

Hinweis: Betrachten Sie zu gegebenen $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1} \in K$ die Matrix $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ definiert durch $a_{i,n} = -\beta_{i-1}$ für alle $1 \leq i \leq n$, durch $a_{j+1,j} = 1$ für alle $1 \leq j \leq n-1$, und durch $a_{i,j} = 0$ für alle verbleibenden Paare (i, j).