Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne

Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 3

Aufgabe 1: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen: sie ist rekursiv definiert durch die Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ und die Festsetzungen $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$. Geben Sie eine geschlossene (also: nichtrekursive) Formel für f_n an.

Was hat dies mit den Potenzen der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$ zu tun ?

Aufgabe 2: Bestimme Sie für die folgenden $A \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{C})$ jeweils eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ derart, dass $S^{-1}AS$ Jordansche Normalform hat.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$, sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Bezüglich einer geeigneten Basis von V besitze die darstellende Matrix von f die Gestalt $(a_{ij})_{ij}$ mit $a_{11} = \ldots = a_{nn} = \lambda$ für ein $\lambda \in K$, mit $a_{12} = \ldots = a_{n-1,n} = 1$ und mit $a_{ij} = 0$ für alle weiteren Paare (ij). Zeigen Sie, dass V f-unzerlegbar ist.

Hinweis: Eine (hypothetische) f-invariante Zerlegung von V führte zu einer Zerlegung von χ_f. Was liesse sich über die Faktoren sagen ?

Aufgabe 4: Sei V ein dreidimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, seien $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f^3 = g^3 = 0$. Zeigen Sie, dass die Minimalpolynome von f und g genau dann übereinstimmen, wenn ein $h \in \mathrm{GL}(V)$ mit $h^{-1}fh = g$ existiert.

Hinweis: Betrachten Sie die möglichen Jordanschen Normalformen von f und g.