Prof. Dr. Elmar Grosse-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 4

Aufgabe 1: Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Eine *Flagge* in V ist eine Folge

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

von K-Untervektorräumen von V mit $\dim_K(V_{i+1}/V_i) = 1$ für alle $1 \leq i \leq n-1$. Sie heisst f-invariant, falls alle V_i f-invariant sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) V enthält eine f-invariante Flagge.

(ii) V besitzt eine Basis, bezüglich der die darstellende Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ von f obere Dreiecksgestalt hat, das heisst es gilt $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

(iii) Das charakteristische Polynom von f zerfällt in Linearfaktoren.

Hinweis zu (iii)$\Rightarrow$(i): Induktion nach $\dim(V)$, nutzen Sie zum Beispiel Blatt 1, Aufgabe 3.

Aufgabe 2: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Zeigen Sie: A und A^t haben dieselbe Jordansche Normalform.

Aufgabe 3: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f, sei $\chi_f(X) = \prod_{i=}^{r}(\lambda_i - X)^{\ell_i}$ und $\mu_f(X) = \prod_{i=}^{r}(X - \lambda_i)^{k_i}$. Für $i \in \{1, \ldots, r\}$ sei der Untervektorraum H_i von V definiert durch

$$H_i = \ker((f - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{k_i}).$$

Zeigen Sie:

(i) Es gilt $H_i = q_i(f)(V)$ mit $q_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r}(X - \lambda_j)^{k_j} \in K[X]$.

(ii) Es gilt $V = \oplus_{i=1}^{r} H_i$ und $\dim(H_i) = \ell_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Aufgabe 4: Sei K ein Körper, auf dem K-Vektorraum $K[Y]$ der Polynome in der freien Variablen Y betrachten wir die Standardderivation (formale Ableitung)

$$\frac{d}{dY} : K[Y] \to K[Y], \quad \sum_{i \geq 0} a_i Y^i \mapsto \sum_{i \geq 0} (i+1) a_{i+1} Y^i.$$

Machen Sie sich klar, dass $\frac{d}{dY}$ K-linear ist (dies braucht nicht aufgeschrieben zu werden). Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $P_n = \{f \in K[Y] \,|\, \deg(f) \leq n\}$, der K-Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n. Wir lesen fortan $\frac{d}{dY}$ als Endomorphismus von P_n. Zeigen Sie:

(a) $\chi_{\frac{d}{dY}}(X) = (-X)^{n+1}$ in $K[X]$.

(b) Enthält K den Körper $\mathbb{Q}$ (also zum Beispiel $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) so ist P_n $\frac{d}{dY}$-unzerlegbar, und es gilt $\mu_{\frac{d}{dY}}(X) = X^{n+1}$.

(c) (4 Zusatzpunkte) Sei p eine Primzahl, sei $K = \mathbb{F}_p$, der Körper mit p Elementen. Bestimmen Sie das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform von $\frac{d}{dY}$.

Hinweis: Die Zahlen $k, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definiert durch $n = kp + r$ und $r < p$ spielen eine Rolle !