Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 6

Aufgabe 1: Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ jeweils eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, für die $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt besitzt.

(i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, seien $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $\widetilde{f \circ g} = \tilde{g}\tilde{f}$ und $\widetilde{\lambda f + \mu g} = \bar{\lambda}\tilde{f} + \bar{\mu}\tilde{g}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(ii) Die Abbildung $f \circ \tilde{f}$ ist selbstadjungiert, und alle ihre Eigenwerte sind nichtnegative reelle Zahlen.

(iii) Sind f und g selbstadjungiert, so ist $f \circ g$ genau dann selbstadjungiert, wenn $f \circ g = g \circ f$.

Aufgabe 3: Es sei $(V, \langle , \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass für alle $v, w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ auch $\langle f(v), f(w) \rangle = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass ein $\alpha \in \mathbb{C}$ existiert, für welches $\alpha f : V \to V$ eine Isometrie ist.

Aufgabe 4: Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $H \subset V$ eine Hyperebene (durch den Ursprung), also ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum der Dimension $\dim(V) - 1$. Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus mit den Eigenschaften

(i) $f|_H = \mathrm{id}_H$,

(ii) $f \circ f = \mathrm{id}_V$,

(iii) $f \neq \mathrm{id}_V$.

Zeigen Sie:

(a) Ist $\langle , \rangle$ ein Skalarprodukt auf V bezüglich welchem f orthogonal ist, so ist f eine Spiegelung im Sinne von Blatt 5, Aufgabe 3.

(b) Es existiert ein Skalarprodukt auf V bezüglich welchem f orthogonal (also nach (a) eine Spiegelung) ist.