Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 7

Aufgabe 1: Betrachten Sie die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$:

$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 30\sqrt{2} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 30\sqrt{3} \\ -42\sqrt{2} & -18\sqrt{3} & 60 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A orthogonal ist. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$, so dass die Matrix SAS^{-1} von der Form

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

mit einer reellen Zahl $\theta \in [0, 2\pi[$ ist.

Aufgabe 2: Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Seien $f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_m \in V^*$ Linearformen auf V. Zeigen Sie, dass durch

$$b(v, w) := \sum_{i=1}^{m} f_i(v) \cdot g_i(w)$$

eine Bilinearform $b : V \times V \to K$ definiert wird. Ist $m = 1$, so zeigen Sie, dass b genau dann symmetrisch ist, wenn $b = 0$ oder wenn f_1 und g_1 skalare Vielfache voneinander sind. Bestimmen Sie in diesen Fällen das Radikal und den Rang von b.

Aufgabe 3: Sei $(V, \langle , \rangle)$ ein (endlich erzeugter) unitärer Vektorraum, sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Es gelte $f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f$. Zeigen Sie:

(a) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist v ein Eigenvektor von $\tilde{f}$ zum Eigenwert $\bar{\lambda}$. Der $\mathbb{C}$-Untervektorraum $\langle v \rangle^{\perp}$ von V ist invariant unter f und $\tilde{f}$.

(b) V besitzt eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren für f.

Bemerkung: Ein $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $f \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ f$ heißt *normal*. Offenbar ist f normal, falls f selbstadjungiert oder eine Isometrie ist. Aussage (b) verallgemeinert also Ergebnisse aus der Vorlesung (insofern diese den Körper $\mathbb{C}$ betreffen).

Aufgabe 4: Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, sei $(V, \langle , \rangle)$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit Skalarprodukt, sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Ist f selbstadjungiert und sind alle Eigenwerte von f nicht-negativ, so existiert eine selbstadjungiertes $g \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $g^2 = f$.

(b) Ist f bijektiv, so existieren eine Isometrie $f_1 \in \mathrm{End}_K(V)$ und ein selbstadjungiertes $f_2 \in \mathrm{End}_K(V)$ mit positiven reellen Eigenwerten, so dass $f = f_1 \circ f_2$. Man nennt dies die *Polarzerlegung* von f.

AUFGABE 5: (2 Zusatzpunkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Winkel $\theta \in [0, 2\pi[$. Sei B die darstellende Matrix von f bezüglich einer beliebigen Basis von $\mathbb{R}^2$ (nicht notwendig eine Orthonormalbasis). Wie lässt sich $\cos(\theta)$ *direkt* aus B ablesen ?