Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 8

AUFGABE 1: Sei K ein Körper, in dem $1+1 \neq 0$ gilt. Sei $f : V_1 \to V_2$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V_1, V_2. Sei b_2 eine symmetrische Bilinearform auf V_2, sei q_2 ihre zugehörige quadratische Form. Zeigen Sie:

(i) Die durch $q_1(v) := q_2(f(v))$ definierte Abbildung $q_1 : V \to K$ ist die einer symmetrischen Bilinearform q_1 auf V_1 zugehörige quadratische Form.

(ii) Gilt $\mathrm{Rad}(V_1) = 0$, so ist f injektiv.

(iii) Beweisen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: ist f injektiv und b_2 nicht ausgeartet, so gilt $\mathrm{Rad}(V_1) = 0$.

AUFGABE 2: Die symmetrische Bilinearform b auf $\mathbb{Q}^3$ werde bezüglich der Standardbasis dargestellt durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{Q}).$$

(i) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{Q}^3$, bezüglich der b durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

(ii) Fassen Sie nun A als ein Element von $\mathrm{Mat}_{3,3}(\mathbb{R})$ auf und bestimmen Sie ein $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ derart, dass S^tAS eine Diagonalmatrix mit Einträgen in $\{-1, 0, 1\}$ ist.

AUFGABE 3: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, dazu $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ die darstellende Matrix von b bezüglich einer beliebigen Basis von $\mathbb{R}^n$. Sei μ beziehungsweise ν die Anzahl der positiven beziehungsweise negativen Eigenwerte der durch A dargestellten linearen Abbildung $\ell_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass μ zugleich der Index von b ist, und dass b genau dann indefinit ist, wenn $\mu \neq 0$ und $\nu \neq 0$.

AUFGABE 4: Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der differenzierbaren Funktionen $]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$. Zu $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sei $X^i \in V$ definiert durch $X^i(x) = x^i$ für alle $x \in]-\infty, \infty[$. Zu $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sei $\mathcal{P}_n$ der $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V, der durch alle X^i mit $0 \leq i \leq n$ erzeugt wird.

(i) Zeigen Sie, dass $d : V \times V \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto (fg)'(0)$ eine symmetrische Bilinearform ist.

(ii) Bestimmen Sie $\mathrm{Rad}(V) = \{v \in V \mid d(w, v) = 0 \text{ für alle } w \in V\}$.

(iii) Betrachten Sie die symmetrische Bilinearform $d|_{\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n} : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ auf $\mathcal{P}_n$ (für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Bestimmen Sie eine Basis von $\mathcal{P}_n$, bezüglich der die $d|_{\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n}$ darstellende Matrix eine Diagonalmatrix mit Einträgen in $\{-1, 0, 1\}$ ist.