Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II*
Übungsaufgaben, Blatt 9

Aufgabe 1: Eine symmetrische reelle Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt positiv definit (beziehungsweise negativ definit), wenn $x^tAx > 0$ (beziehungsweise $x^tAx < 0$) für alle $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ gilt. Zeigen Sie:

a) A ist negativ definit genau dann, wenn $-A$ positiv definit ist.

b) A ist positiv definit (beziehungsweise negativ definit) genau dann, wenn alle Eigenwerte von A positiv (beziehungsweise negativ) sind. (Hier dürfen Sie auf eine früher schon gelöste Übungsaufgabe zurückgreifen — dann ist das Argument ganz kurz !)

c) Untersuchen Sie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{pmatrix}$ auf positive oder negative Definitheit.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Ränge und die Indizes der zu den folgenden quadratischen Formen $q : V \to \mathbb{R}$ gehörigen symmetrischen Bilinearformen. Welche unter diesen sind positiv (semi)definit, negativ (semi)definit, indefinit ?

a) $q(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ auf $V = \mathbb{R}^2$, für feste $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

b) $q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ auf $V = \mathbb{R}^2$

c) $q(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_3^2$ auf $V = \mathbb{R}^3$

d) $q(x_1, x_2, x_3) = -9x_1^2 - 16x_1x_2 - 8x_2^2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3 - 2x_3^2$ auf $V = \mathbb{R}^3$

Aufgabe 3: Sei b eine nicht ausgeartete Bilinearform vom Index $n - 1$ auf dem n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Ein Vektor $v \in V - \{0\}$ heißt Ortsvektor (beziehungsweise Zeitvektor, beziehungsweise Lichtvektor), falls $b(v, v) > 0$ (beziehungsweise $b(v, v) < 0$, beziehungsweise $b(v, v) = 0$). Zeigen Sie:

a) Für je zwei Zeitvektoren v_1, v_2 gilt $b(v_1, v_2) \neq 0$.

b) Für jeden Zeitvektor v_1 und jeden Lichtvektor v_2 gilt $b(v_1, v_2) \neq 0$.

c) Für je zwei Lichtvektoren v_1, v_2 gilt $b(v_1, v_2) = 0$ genau dann, wenn sie linear abhängig sind.

Aufgabe 4: Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der endlichen Dimension $n \geq 1$ und $x_0, \dots, x_n$ eine Familie von Elementen von V mit der Eigenschaft, dass die Menge $\{x_j - x_0 \,|\, 1 \leq j \leq n\}$ eine Basis von V bildet. Zeigen Sie, dass für jede Familie $y_0, \dots, y_n$ von Elementen von V genau eine affine Abbildung $\varphi : V \to V$ existiert mit $\varphi(x_j) = y_j$ für alle $j \in \{0, \dots, n\}$.